Trường Đại học Bách khoa tp Hồ Chí Minh
Bộ môn Toán ứng dụng

Chương 1: Ma trận

Giảng viên: Ts. Đặng Văn Vinh (9/2008)
www.tanbachkhoa.edu.vn

NỘI DUNG

I. Định nghĩa ma trận và ví dụ

II. Các phép biến đổi sơ cấp

III. Các phép toán đối với ma trận

IV. Hạng của ma trận

V. Ma trận nghịch đảo

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Định nghĩa ma trận

Ma trận cở m×n là bảng số (thực hoặc phức) hình chử nhật có m hàng và n cột .

Ma trận A cở m×n

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \text{Cột } j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
A = & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \text{Hàng } i \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Ví dụ 1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Đây là ma trận thực cở 2x3.

Ma trận A có 2 hàng và 3 cột.

Phần tử của A: $a_{11} = 3; a_{12} = 4; a_{13} = 1; a_{21} = 2; a_{22} = 0; a_{23} = 5$

Ví dụ 2

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & i \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Ma trận A có m hàng và n cột thường được ký hiệu bởi

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Tập hợp tất cả các ma trận cở m x n trên trường K được ký hiệu là $M_{m\times n}[K]$

Định nghĩa ma trận không

Ma trận có tất cả các phần tử là không được gọi là ma trận không, ký hiệu 0, ($a_{ij} = 0$ với mọi i và j).

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ

Phần tử khác không đầu tiên của một hàng kể từ bên trái được gọi là phần tử cơ sở của hàng đó.

Định nghĩa ma trận dạng bậc thang

1. Hàng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng
2. Phần tử cơ sở của hàng dưới nằm bên phải (không cùng cột) so với phần tử cơ sở của hàng trên.

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Không là ma trận bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Không là ma trận bậc thang

I. Các khái niệm và ví dụ cơ bản.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4\times 5}$$

Là ma trận dạng bậc thang

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Là ma trận dạng bậc thang

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ

Định nghĩa ma trận chuyển vị

Chuyển vị của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $A^T = (a_{ij})_{n\times m}$ cở n x m thu được từ A bằng cách chuyển hàng thành cột.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}_{2\times 3} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Định nghĩa ma trận vuông

Nếu số hàng và cột của ma trận A bằng nhau và bằng n, thì A được gọi là ma trận vuông cấp n.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Tập hợp các ma trận vuông cấp n trên trường số K được ký hiệu bởi $M_n[K]$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Các phần tử a_{11}, a_{22},…,a_{nn} tạo nên đường chéo chính của ma trận vuông A.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Định nghĩa ma trận tam giác trên

Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ được gọi là ma trận tam giác trên nếu $a_{ij} = 0,\ \forall i > j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa ma trận tam giác dưới

Ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ được gọi là ma trận tam giác dưới nếu $a_{ij} = 0,\ \forall i < j$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Định nghĩa ma trận chéo

Ma trận vuông A được gọi là ma trận chéo nếu các phần tử nằm ngoài đường chéo đều bằng không, có nghĩa là ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$).

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa ma trận đơn vị

Ma trận chéo với các phần tử đường chéo đều bằng 1 được gọi là ma trận đơn vị, tức là ($a_{ij} = 0$, $i \neq j$; và $a_{ii} = 1$ với mọi i).

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Định nghĩa ma trận ba đường chéo.

Ma trận ba đường chéo là ma trận các phần tử nằm ngoài ba đường chéo (đường chéo chính, trên nó một đường, dưới nó một đường) đều bằng không.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

I. Các khái niệm cơ bản và ví dụ.

Định nghĩa ma trận đối xứng thực

Ma trận vuông thực A thỏa $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi i = 1,….n và j =1,…,n được gọi là ma trận đối xứng (tức là, nếu $A = A^T$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \boxed{3} \\ -1 & 4 & 7 \\ \boxed{3} & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Định nghĩa ma trận phản đối xứng

Ma trận vuông A thỏa $a_{ij} = - a_{ji}$ với mọi i và j (tức là $A = -A^T$) được gọi là ma trận phản đối xứng.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng

1. Nhân một hàng tùy ý với một số khác không $h_i \to \alpha h_i; \alpha \neq 0$

2. Cộng vào một hàng một hàng khác đã được nhân với một số tùy ý $h_i \to h_i + \beta h_j; \forall \beta$

3. Đổi chỗ hai hàng tùy ý $h_i \leftrightarrow h_j$

Tương tự có ba phép biến đổi sơ cấp đối với cột.

Chú ý: các phép biến đổi sơ cấp là các phép biến đổi cơ bản, thường dùng nhất!!!

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Định lý 1

Mọi ma trận đều có thể đưa về ma trận dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng.

Chú ý

Khi dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng ta thu được nhiều ma trận bậc thang khác nhau

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ

Dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hàng đưa ma trận sau đây về ma trận dạng bậc thang.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Bước 1. Bắt đầu từ cột khác không đầu tiên từ bên trái. Chọn phần tử khác không tùy ý làm phần tử cơ sở.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Bước 2. Dùng bđsc đối với hàng, khử tất cả các phần tử còn lại của cột.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ \cancel{2} & 3 & -1 & 4 & 5 \\ \cancel{3} & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -\cancel{1} & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{h_3\to h_3-3h_1 \\ h_4\to h_4+h_1}]{h_2\to h_2-2h_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bước . Che tất cả các hàng từ hàng chứa phần tử cơ sở và những hàng trên nó. Áp dụng bước 1 và 2 cho ma trận còn lại

$$\xrightarrow[h_4\to h_4-2h_2]{h_3\to h_3+h_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_4\to h_4+h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

II. Các phép biến đổi sơ cấp.

Định nghĩa

Nếu dùng các biến đổi sơ cấp đưa A về ma trận bậc thang U, thì U được gọi là dạng bậc thang của A.

Định nghĩa

Cột của ma trận bậc thang A được gọi là cột cơ sở nếu cột đó chứa phần tử cơ sở

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Sự bằng nhau của hai ma trận

Hai ma trận bằng nhau nếu: 1) cùng cở; 2) các phần tử ở những vị trí tương ứng bằng nhau ($a_{ij} = b_{ij}$ với mọi i và j).

Phép cộng hai ma trận

Tổng A + B: $\begin{cases} \text{Cùng cở} \\ \text{Các phần tử tương ứng cộng lại} \end{cases}$

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Phép nhân ma trận với một số.

Nhân ma trận với một số, ta lấy số đó nhân với tất cả các phần tử của ma trận.

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow 2 \times A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Tính chất:

a) A + B = B + A; b) (A + B) + C = A + (B + C);

c) A + 0 = A; d) k(A + B) = kA + kB;

e) k (mA) = (km) A; f) (k + m)A = kA + mA;

III. Các phép toán đối với ma trận

Phép nhân hai ma trận với nhau

$$A = (a_{ij})_{m\times p} ; B = (b_{ij})_{p\times n}$$

$$AB = C = (c_{ij})_{m\times n} \quad \text{với} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} & & * & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ & & * & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & b_{1j} & \\ * & b_{2j} & * \\ & \mathrm{M} & \\ & b_{pj} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \mathrm{M} & \\ \ldots & c_{ij} & \ldots \\ & \mathrm{M} & \end{bmatrix}$$

Để tìm phần tử $c_{2,3}$ ở ma trận tích: lấy hàng 2 của A nhân với cột 3 của B (coi như nhân tích vô hướng hai véctơ với nhau)

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ Tính AB

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + (-1) \times 3 + 4 \times 2 = 7$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

Tìm ma trận X, thỏa $AX = B$.

Xác định cở của ma trận X là $2\text{x}1$. Đặt $X=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$

$$AX=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2a-b\\ 4a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2a-b=1\\ 4a+b=3\end{cases} \Leftrightarrow a=\frac{2}{3}, b=\frac{1}{3}$$ Va鎯 $X=\begin{pmatrix}2/3\\ 1/3\end{pmatrix}$

III. Các phép toán đối với ma trận

Tính chất của phép nhân hai ma trận

a. A(BC) = (AB)C; b. A(B + C) = AB + AC;

c. (B + C)A = BA + CA; d. $I_m A = A = A I_m$

e. k (AB) = (kA)B = A(kB).

Chú ý:

1. Nói chung $AB \neq BA$

2. $AB = AC \not\longrightarrow B = C$

3. $AB = 0 \not\longrightarrow A = 0 \vee B = 0$

III. Các phép toán đối với ma trận

Nâng ma trận lên lũy thừa.

Qui 鲷騄: $A^0 = I$

$A^2 = A \cdot A$

$A^3 = A \cdot A \cdot A$

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n}$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; A = (a_{ij})_{n \times n}$$

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I\,.$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; f(x) = 2x^2 - 4x + 3 \qquad \text{Tính } f(A).$$

$$f(A) = 2A^2 - 4A + 3I$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = 2\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2; A^3, từ đó suy ra A^{200}

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \times 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Tính } A^{200}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ta co?} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 2^{200} & 300 \cdot 2^{200} \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix}$$

III. Các phép toán đối với ma trận

Ví dụ

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{200}

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2A$$

Suy ra: $A^n = 2^{n-1}A$

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 2^{199} & 2^{199} \\ 2^{199} & 2^{199} \end{pmatrix}$$

Ví dụ $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. Tính A^{200}

$$A=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2B+I \qquad B^n=2^{n-1}B$$

Vì B và I giao hoán nhau nên ta dùng nhị thức Newton

$$(2B+I)^{200}=C_{200}^{0}(2B)^{200}+C_{200}^{1}(2B)^{199}+\ldots+C_{200}^{200}I^{200}$$

$$=C_{200}^{0}2^{200}.2^{200-1}B+C_{200}^{1}2^{199}.2^{199-1}B+\ldots+C_{200}^{200}I^{200}$$

$$=\frac{B}{2}\left(C_{200}^{0}4^{200}+C_{200}^{1}4^{199}+\ldots+C_{200}^{199}.4\right)+C_{200}^{200}I$$

$$=\left((4+1)^{200}-1\right).\frac{B}{2}+I$$

IV. Hạng của ma trận

Định nghĩa hạng của ma trận

Giả sử A_{mxn} tương đương hàng (cột) với ma trận bậc thang E. Khi đó ta gọi hạng của ma trận A là số các hàng khác không của ma trận bậc thang

r(A) = số hàng khác không của ma trận bậc thang E

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{h_2 \leftrightarrow h_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Sử dụng biến đổi sơ cấp, tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm hạng của ma trận sau

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho r(A) =3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & m-3 & m-5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & m-1 & m-8 \end{pmatrix}$$

r(A) = 3 với mọi giá trị m.

IV. Hạng của ma trận

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực m sao cho r(A) =2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của m để cho r(A) = 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

IV. Hạng của ma trận

Tính chất của hạng ma trận

1. $r(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$

2. $A = (a_{ij})_{m \times n} \longrightarrow r(A) \le \min\{m, n\}$

3. Nếu $A \xrightarrow{\text{BĐSC}} B$, thì $r(B) = r(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to r(A) = 1.$$

V. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa ma trận nghịch đảo

Ma trận vuông A được gọi là ma trận khả nghịch nếu tồn tại ma trận I sao cho $AB = I = BA$. Khi đó B được gọi là nghịch đảo của A và ký hiệu là A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad \text{Giả sử} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$$\left.\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ BA &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}\right\} \quad A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

V. Ma trận nghịch đảo

Chú ý

Không phải bất kỳ ma trận vuông A nào cũng khả nghịch. Có rất nhiều ma trận vuông không khả nghịch.

Định nghĩa

Ma trận khả nghịch được gọi là ma trận không suy biến

Ma trận không khả nghịch được gọi là ma trận suy biến

V. Ma trận nghịch đảo

Sự tồn tại của ma trận khả nghịch.

Cho ma trận vuông A, các mệnh đề sau đây tương đương

1. Tồn tại A^{-1} (A không suy biến)
2. $r(A) = n$
3. $AX = 0$ suy ra $X = 0$.
4. $A \xrightarrow{\text{Tương đương hàng}} I$

V. Ma trận nghịch đảo

Định nghĩa ma trận sơ cấp

Ma trận thu được từ I bằng đúng 1 phép biến đổi sơ cấp được gọi là ma trận sơ cấp.

Ví dụ

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to 3h_3} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_2 \to h_2 + 2h_1} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V. Ma trận nghịch đảo

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_1} E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Một phép biến đổi sơ cấp đối với hàng của ma trận A đồng nghĩa với nhân bên trái A với ma trận sơ cấp tương ứng.

Một phép biến đổi sơ cấp đối với cột của ma trận A đồng nghĩa với nhân bên phải A với ma trận sơ cấp tương ứng.

V. Ma trận nghịch đảo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \leftrightarrow h_1} B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

V. Ma trận nghịch đảo

$$A \xrightarrow{\text{b駢c ha鶩g}} I \Leftrightarrow I = E_n E_{n-1} \ldots E_1 A$$

$$\Rightarrow A^{-1} = E_n E_{n-1} \ldots E_1 I$$

$$\Leftrightarrow I \xrightarrow{\text{b駢c ha鶩g 酐tre鈔}} A^{-1}$$

V. Ma trận nghịch đảo

Cách tìm A^{-1}

$$[\,A|I\,] \xrightarrow{\text{Bđsc đối với hàng}} [\,I|A^{-1}\,]$$

Ví dụ

Tìm nghịch đảo (nếu có) của ma trận
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

V. Ma trận nghịch đảo

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]=[I \mid A^{-1}]$$

$$\longrightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

V. Ma trận nghịch đảo

Độ phức tạp của thuật toán tìm A^{-1}

Tính $A_{n\times n}^{-1}$ bằng các phép sơ cấp đối với hàng của ma trận [A|I] ta cần sử dụng

n^3 phép nhân hoặc chia

$n^3 - 2n^2 + n$ phép cộng hoặc trừ

Tính chất của ma trận nghịch đảo

Đối với hai ma trận khả nghịch A và B, các khẳng định sau đây đúng.

$(A^{-1})^{-1} = A$

Tích AB là hai ma trận khả nghịch.

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

IV. Ma trận nghịch đảo

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực *m* để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ

Tìm tất cả các giá trị thực của *m* để cho A khả nghịch.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

VI. Kết luận

Ma trận là gì? Ma trận vuông ? Ma trận bậc thang

Ma trận không? Ma trận chéo? Ma trận chuyển vị?

Ma trận đơn vị? Ma trận đối xứng?

Các phép toán đối với ma trận: Sự bằng nhau Phép cộng

Nhân ma trận với một số Nhân hai ma trận với nhau

Nâng lên lũy thừa

Hạng của ma trận là gì?

Làm thế nào để tìm hạng của một ma trận cho trước?

Ma trận khả nghịch là gì? Nghịch đảo của ma trận A là gì?

Làm thế nào để tìm nghịch đảo của một ma trận cho trước?

Bài tập 1

Thực hiện phép toán

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Bài tập 2.

Tìm f(A), biết

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 5 \quad \text{và} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 3.

Tìm ma trận X, sao cho AX = B, với

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bài tập 4

Cho
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tính
$$3A + 2B^T$$

Bài tập 5.

Đưa ma trận sau về dạng bậc thang bằng biến đổi sơ cấp

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài tập 6

Tìm ma trận nghịch đảo, nếu có

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 7

Đưa về ma trận bậc thang, tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Bài tập 8

Tìm ma trận A, nếu

$$5A-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix}=3A-\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

Bài tập 9

Tìm các giá trị của s và t, sao cho ma trận sau là đối xứng

$$A = \begin{pmatrix} s & 2s & st \\ t & -1 & s \\ t & s^2 & s \end{pmatrix}$$

Bài tập 10

Cho $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$ cho A là ma trận cở $3_x n$, B cở $n_x 3$.

a) Mô tả PA theo nghĩa biến đổi sơ cấp đối với hàng

b) Mô tả BP theo nghĩa biến đổi sơ cấp đối với cột

Bài tập 11

Cho A, B, C là các ma trận, đơn giản biểu thức sau

$$A(3B - C) + (A - 3B)C + 2B(C + 2A)$$

Bài tập 12

Tìm ma trận nghịch đảo của A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Bài tập 13

Tính A^{43}, biết

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài tập 14

Cho $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ là ma trận vuông.

a) Tính A^2.

b) Tính A^n.

Bài tập 15

Cho hai ma trận A và B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tìm tất cả ma trận X, sao cho AX = B.

Bài tập 16

Tìm tất cả các giá trị m sao cho (A) = 2

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Bài tập 17

Biện luận theo m hạng của ma trận A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & m \end{pmatrix}$$

Bài tập 18

Tìm tất cả số thực m, sao cho ma trận A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{pmatrix}$$

Bài tập 19

Tìm tất cả các số thực m, sao cho ma trận A khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & m & m+1 \end{pmatrix}$$

Bài tập 20

Giả sử A là ma trận khả nghịch cấp 5. Tìm $r(A)$ và $r(A^{-1})$

Cảm ơn các em nhiều!