HỆ THỐNG HÓA KIẾN THỨC MÔN GIẢI TÍCH 2

1 Đạo hàm Vi phân

1.1 Vi phân

1. Cấp 1: $\mathrm{d}f = f'_x \mathrm{d}x + f'_y \mathrm{d}y$.
2. Cấp 2: $\mathrm{d}^2 f = f''_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}y + f''_{yy}\mathrm{d}y^2$

1.2 Vector Gradient, đạo hàm theo hướng của

1. $\nabla f(x,y) = (f_x, f_y, f'_z)\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \dfrac{\langle \nabla f, \vec{u}\rangle}{|\vec{u}|}$
2. $\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y)\,, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \dfrac{\langle \nabla f, \vec{u}\rangle}{|\vec{u}|}$
3. Hướng tăng nhanh nhất của f khi đi qua M là hướng của $\nabla f(M)$. Giá trị lớn nhất của $\dfrac{\partial f(M)}{\partial \vec{u}}$ là $|\nabla f(M)|$

1.3 Phương trình tiếp diện tại $M(x_0, y_0, z_0)$

1. Pt mặt cong $S: F(x,y,z) = 0$
$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0$
2. Pt mặt cong $S: z = z(x,y)$
$z = z'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + z_0$

2 Tích phân kép $I = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2.1 Trong tọa độ Descartes

1. $D: a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$
$I = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$
2. $D: c \le y \le d, x_1(y) \le x \le x_2(y)$
$I = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$

2.2 Tọa độ cực cơ bản $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$

$$I = \int\limits_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}r$$

1. Hình tròn tâm $O(0,0)$: $x^2 + y^2 \le R^2$:
$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (-\pi \le \varphi \le \pi) \\ 0 \le r \le R \end{cases}$
2. Hình tròn tâm $O(R,0)$: $x^2 + y^2 \le 2Rx$:
$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le r \le 2R\cos\varphi \end{cases}$
3. Hình tròn tâm $O(-R,0)$: $x^2 + y^2 \le -2Rx$:
$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2} \\ 0 \le r \le -2R\cos\varphi \end{cases}$
4. Hình tròn tâm $O(0,R)$: $x^2 + y^2 \le 2Ry$:
$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi \\ 0 \le r \le 2R\sin\varphi \end{cases}$
5. Hình tròn tâm $O(0,-R)$: $x^2 + y^2 \le -2Ry$:
$\begin{cases} \pi \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le r \le -2R\sin\varphi \end{cases}$

2.3 Tọa độ cực mở rộng

1. Áp dụng cho hình tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le R^2$
$x = a + r\cos\varphi, y = b + r\sin\varphi$, **J=r**
$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (-\pi \le \varphi \le \pi) \\ 0 \le r \le R \end{cases}$
2. Áp dụng cho miền $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$,
$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$, **J=abr**
$\begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi \quad (-\pi \le \varphi \le \pi) \\ 0 \le r \le \mathbf{1} \end{cases}$

3 Tích phân bội 3 $I = \iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

3.1 Trong tọa độ Descartes

$\Omega : z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y), hc\Omega = D \subset Oxy$

$$I = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Cách xác định D : gồm 3 yếu tố

1. Các pt hoặc bất pt (xác định Ω) **không chứa z**
2. Hình chiếu giao tuyến của $z = z_1$ và $z = z_2$: $z_1(x,y) = z_2(x,y)$ (Sử dụng khi yếu tố 1 không tạo ra miền kín hoặc không có).
3. Giao miền tạo bởi 2 yếu tố trên và điều kiện xác định của $z_1(x,y), z_2(x,y)$

3.2 Đổi biến

1. **Tọa độ trụ** : **Khi miền D đổi sang tọa độ cực**
2. **Tọa độ cầu**
$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$
Sử dụng khi có mặt cầu tâm O hoặc tâm $(0,0,\pm R)$ kết hợp với
a/ Các mặt tọa độ
b/ Các mặt phẳng đi qua trục Oz, VD : $y = kx$
c/ Nón $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$
CÁCH XÁC ĐỊNH CẬN
(i) Điều kiện của x, y là điều kiện của φ trên Oxy giống tọa độ cực.
(ii) Cho $x = 0$ trong điều kiện của Ω, lát cắt trên Oyz xác định ρ, θ.

Lưu ý : ρ là khoảng cách từ gốc O đến đường tròn, θ là góc quay từ trục Oz về cả 2 phía $\curvearrowleft, \curvearrowright$ $(0 \le \theta \le \pi)$

3. **Thể tích** $\Omega : V = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

4 Tích phân đường

4.1 Tham số hóa đường cong

Là biểu diễn x, y hoặc x, y, z theo một biến.

1. **Đường phẳng**
   a/Tọa độ Descartes : $y = y(x), x \in [a, b]$
   hay $x = x(y), y \in [c, d]$
   b/Đường tròn $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$:
   $\begin{cases} x = a + R\cos t, y = b + R\sin t \\ t \in [0, 2\pi] \ hay \ t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$
   c/Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: $\begin{cases} x = a\cos t, y = b\sin t \\ t \in [0, 2\pi] \ hay \ t \in [-\pi, \pi] \end{cases}$

2. **Đường không gian (giao tuyến của 2 mặt)**
   Cách 1 : Nếu có 1 pt mặt chứa 2 biến, xem nó như đường phẳng để tham số hóa, dùng pt còn lại tìm tham số cho biến thứ 3
   Cách 2 : xác định hình chiếu giao tuyến lên một mp tọa độ, ts hóa cho hc này rồi dùng 1 pt mặt để tìm ts cho biến thứ 3.

4.2 Tích phân đường loại 2

$$I = \int_A^B P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y \text{ theo đường cong } C$$

1. **Cách tính**
   a/ $C : y = y(x) \Rightarrow I = \int_{x_A}^{x_B} P(x, y(x))\mathrm{d}x + Q(x, y(x))y'(x)\mathrm{d}x$
   b/ $C : x = x(t), y = y(t)$
   $\Rightarrow I = \int_{t_A}^{t_B} P(x(t), y(t))x'(t)\mathrm{d}t + Q(x(t), y(t))y'(t)\mathrm{d}t$

2. **Công thức Green** : C là biên ngoài, $\curvearrowleft$ của miền hữu hạn D (nếu có biên trong thì C gồm cả 2 biên và biên trong lấy $\curvearrowright$)
   $I = \int\limits_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
   Lưu ý: C phải là đường kín (hoặc nhiều đường kín).
   Nếu C không kín thì ghép đường (nên là các đường dạng $x = a$ hay $y = a$ và theo chiều của C so với miền D)

3. **Tích phân không phụ thuộc đường đi**
   B1: Kiểm tra $Q'x = P'y$
   B2: Tính I bằng cách đổi đường đi (đường gấp khúc $x = a, y = b$ đi từ A đến B) hoặc chọn hàm U thỏa $dU = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ và $I = U(B) - U(A)$.

5 Tích phân mặt loại 1

$$I = \int\limits_S f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

Cách tính

1. Viết phương trình mặt $S : z = z(x, y)$ (hoặc $x = x(y, z), y = y(z, x)$).
2. Xác định hình chiếu D của Slên mp tọa độ tương ứng (VD chiếu lên mp $z = 0$)
   Xác định từ 3 yếu tố :
   (i) Pt mặt chắn mà không chứa z
   (ii) Hình chiếu giao tuyến giữa S và các mặt chắn mà pt chứa z
   (iii) Giao với điều kiện xác định của $z(x, y)$.
3. Tính $I = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

6 Tích phân mặt loại 2

$$I = \iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

6.1 Cách tính

Bước 1 Chọn cách viết pt S, VD $z = z(x, y)$

Bước 1 Xác định hình chiếu D_{xy} của S lên mp tọa độ tương ứng

Bước 1 Tính $I = \pm \iint\limits_{D_{xy}} (P, Q, R)(-z'_x, -z'_y, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Lấy $+$ nếu S lấy **phía trên** theo hướng Oz

6.2 Công thức Gauss-Oxtrogratxki

Yêu cầu : S là **mặt biên** của Ω, **lấy phía ngoài**

$$I = \iiint\limits_{\Omega} \left(P'_x + Q'_y + R'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

6.3 Công thức Stokes

C là biên của mặt cong hữu hạn **S :z=z(x,y)**, lấy $\curvearrowleft$ nhìn từ phía dương của Oz (nhìn từ trên xuống). Luôn chọn **phía trên** của S
$I = \int\limits_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$
$= I = \iint\limits_S (R'_y - Q'_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P'_z - R'x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (Q'x - P'y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
Nếu lấy $\curvearrowright$: $\int\limits_C = -\iint\limits_S$
Lưu ý : $\iint\limits_S = \oplus \iint\limits_D$

7 Chuỗi số

7.1 Chuỗi cơ bản

1. Chuỗi điều hòa $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\begin{cases} \alpha > 1 : HT \\ \alpha \leq 1 : PK \end{cases}$
2. Chuỗi cấp số nhân $\sum x^n$ $\begin{cases} |x| < 1 : HT \\ |x| \geq 1 : PK \end{cases}$

7.2 Cách chọn tiêu chuẩn khảo sát sự hội tụ

1. Tiêu chuẩn D'Alembert : khi số hạng tổng quát có chứa tích vô hạn.
2. Tiêu chuẩn Cauchy : khi số hạng tổng quát có chứa dạng $u_n^{v_n}$
3. Tiêu chuẩn Leibnitz : chuỗi đan dấu nhưng Không xuất hiện dấu hiệu của 2 tc trên.
4. Tiêu chuẩn so sánh : cách sử dụng
   a/Rút gọn số hạng tổng quát trước khi dùng D'A hoặc Cauchy.
   b/Thành phần chính của số hạng tổng quát chứa n^α
   c/Áp dụng cho chuỗi không âm (giữ nguyên dấu nếu thay $\sim$). d/Nếu áp dụng cho cho $\sum |a_n|$ thì **chỉ kết luận khi chuỗi so sánh hội tụ**.

7.3 Phát biểu định lý

1. **Điều kiện cần** : $a_n \nrightarrow 0$: chuỗi phân kỳ. ($a_n \to 0$ không kết luận được gì.)
2. TC D'Alembert :
   $$D_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to D : \begin{cases} < 1 : HT \\ > 1 : PK \\ = 1 \to \begin{cases} D_n \geq 1 : PK \\ D_n < 1 : \underline{o}KL \end{cases} \end{cases}$$
3. TC Cauchy : $C_n = \sqrt[n]{|a_n|} \to C$: KL giống TC D'A
4. TC Leibnitz : $\sum(-1)^n a_n, 0 \leq a_n \downarrow 0 \Rightarrow$: hội tụ
   ($a_n \nrightarrow 0$: PK, $a_n \to 0$ nhưng không $\downarrow$: $\underline{o}$ KL)
5. $a_n \sim b_n$: $\sum a_n$ và $\sum b_n$ cùng bản chất ($b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ hay $b_n = x^n$)

8 Chuỗi lũy thừa $\sum a_n(x - x_0)^n$

8.1 Miền hội tụ

1. **Bán kính hội tụ**
   $R = \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$
   hay $R = lim \sqrt[n]{|a_n|}$
2. **Khoảng hội tụ** : $(x_0 - R, x_0 + R)$ (chuỗi đã pk bên ngoài $[x_0 - R, x_0 + R]$)
3. **Miền hội tụ** : xét thêm sự hội tụ của 2 chuỗi số tại 2 đầu Khoảng hội tụ (Tại 2 đầu không thể sử dụng C và D nhưng có thể dùng C_n, D_n)

8.2 Chuỗi Taylor

8.3 Tính tổng chuỗi